Math. P.
464

1 464

Mathesis. Geometria generalis
272.

<36602737590018

<36602737590018

Bayer. Staatsbibliothek

Versuch
einer neuen
Grundlegung
der
Geometrie

von

Joh. Heinrich Ernst Rehbein.

Mit zwey Kupfern.

Göttingen,
bey Johann Christian Dieterich.
1795.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Ein Versuch, die ursprünglichen Principien der Geometrie in einem System darzustellen, kann nur die vollendete Ableitung ihrer Wahrheiten aus ihnen zur Absicht haben. Denn da sie unmittelbar im Bewußtseyn ihrer Anschauungen gegeben sind, so kann bey ihrer Ermangelung der Wissenschaft in Ansehung der Gewißheit kein Nachtheil erwachsen. Diese Principien habe ich hier, befreyet von allen unechten Bestimmungen, in ihrer ursprünglichen Reinigkeit, wie es die Würde der Geometrie erfordert, darzustellen gesucht. Vorzüglich sind die transcendentalen Bestimmungen derselben vermieden, die, da die Geometrie von

Seiten ihrer Principien an die Transcendental-Philosophie grenzt, leicht selbst als Principien derselben angesehen werden. In den beygefügten Anmerkungen, die den Inhalt, den Zusammenhang und den Gebrauch derselben bemerklicher machen sollen, sind zwar einige solcher Bestimmungen in dieser Absicht enthalten, die aber von den Principien selbst als abtrennlich anzusehen sind. Eben so sind auch alle empyrische Bestimmungen vermieden, welche sich gerne, wegen der Lebhaftigkeit die sie den Anschauungen verschaffen, und wodurch die Principien einen höhern Grad der Evidenz von dieser Seite zu erhalten scheinen, mit den echten verbindet, oder gar verdrängt. Der letzte Fehler besonders hat etwas der Geometrie Unwürdiges an sich, indem er die Evidenz eines Princips, die für sich fest steht, und ohne welches er selbst nicht

möglich wäre, wo anders hernimmt. Den z. B., daß ein Körper einen andern deckt, dazu wird erst erfordert, daß in verschiedenen Räumen, durch die der Körper in Gedanken sich bewegt, diese Bewegung ohne innere Veränderung desselben möglich sey, in dieser Voraussetzung aber ist schon das Princip, daß übereinstimmende Körper in diesen Räumen möglich sind, enthalten. Die transcendentalen Bestimmungen aber sind, als Principien der Geometrie, bey aller ihrer tiefsinnigen Miene, doch keines Gebrauchs in ihr fähig. So ist z. B. der Satz: daß der Raum aus gleichartigen Theilen bestehe, ein solcher, der zwar den Raum, als unter dem Begriff der Größe enthalten, vorstellt, dadurch aber in ihm nichts, das einer Größenbestimmung fähig wäre, gesetzt wird.

Die Griechischen Geometer haben schon in Ansehung der Form die vollkommensten geometrischen Beweise gegeben, aber um deren Elemente sich nicht viel bekümmert, so daß vielleicht keiner derselben als vollendet anzusehen ist. Um also den Gebrauch, wenigstens einiger der hier gegebenen Principien, zur Vollendung der Beweise anzudeuten, so sind die ersten Lehrsätze der Geometrie, worunter auch der bisher gänzlich unerwiesene Satz von den Parallellinien ist, zugefügt worden. Diesem ist hoffentlich zur Befriedigung der Geometer ein völlig strenger (vielleicht auch einzig möglicher) Beweis gegeben worden. Man wird bemerken, daß sowohl die Ausführung derer Sätze, die die Möglichkeit einer Anschauung (Aufgaben), als die Beweise solcher, welche die Bestimmung derselben (Lehrsätze) betreffen, ohne das besondere Postulat: der

Mög-

Möglichkeit des Kreises mit gegebenem Halbmesser und Mittelpunct, geführt sind. Auf ähnliche Art können alle übrigen Sätze der Geometrie, deren Anschauung aus den gegebenen Bedingungen nur Eine seyn kann, ausgeführt werden, so daß, wenn man wollte, eine gemeine Geometrie von der höhern dadurch sich absondern ließe, daß sie nur gerade Linien und Flächen, mithin die höhere, die krummen, enthielte. Die Auflösungen der Aufgaben dieser Art sind aber durch diese Umänderung ihrer Elemente von den bisherigen wesentlich verschieden, und bloß zur theoretischen Absicht hinreichend.

Da übrigens hier nicht die Absicht war, auch die abgeleiteten Principien mit den ursprünglichen zu verbinden, so ist doch, da diese vorhanden, und ihr Zusammenhang selbst jene vorauszusetzen nöthigt,

die Ergänzung derselben leicht, und also dieser absichtliche Mangel zu entschuldigen. Eben so sind auch die tiefer im Erkenntnißvermögen liegenden Gründe der nothwendigen Bestimmbarkeit der Anschauungen durch Begriffe, die hier als im Bewußtseyn gegeben, vorausgesetzt ist, in den Anmerkungen, als zur transcendentalen Logik gehörig, übergangen worden.

Göttingen,
im Julius 1794.

Principien der Geometrie.

Erklärung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft der reinen Anschauungen im Raum.

Anmerkung.

Diese Erklärung wird hier nur der äußern Vollständigkeit wegen mitgenommen, indem sie eigentlich nicht in die Geometrie, sondern in ein vollendetes System der Transcendental-Philosophie gehört. Eben dieß gilt auch von der Erklärung der Analytik, dem Grundtheile der reinen Mathematik, nach der sie die Darstellung der Größen überhaupt, nach Zeitverhältnissen, enthält. Ihren ursprünglichen Formen der Verknüpfung der Größen (Rechnungsarten), als so vielen Elementen ihrer Construction, liegt also die Form der Zeit, so wie den Constructionen der Anschauungen in der Geometrie, die des Raums zum Grunde, obgleich die Zeit die allgemeine Bedingung ihrer Erzeugung ist. Denn, daß die Zahlen, als Schemate der Größen, und die Formen ihrer Verknüpfung, durch Zeichen im Raum ausgedrückt werden, ist keine nothwendige Bedingung, sondern nur ein Mittel, jene der Einbildungskraft lebhafter vor-

zustellen. Von der transscendentalen Aesthetik aber ist die Geometrie nach der Erklärung dadurch hinreichend unterschieden, daß jene nicht die Anschauungen im Raum selbst bestimmt, sondern nur den Raum als allgemeine Form derselben erwägt.

I. Principien der Verknüpfung der Anschauungen.

Postulate der Verknüpfung der Anschauungen, und die aus ihnen möglichen Arten derselben.

Postulate und Anschauung des Puncts.

Postulat 1.

Der Punct ist möglich.

Postulat 2.

Der Punct in oder außer einem gegebenen Puncte, und jede Menge in oder außer einander gegebener Puncte, ist möglich.

Anschauung 1.

Der Punct wie bey A. Fig. 1. hat keine Theile.

Postulat 3.

Die mit zwey Grenzpuncten gegebene Linie ist möglich.

Postulat

Postulat 4.

Die Linie mit zwey gegebenen Grenzpuncten, in oder außer der ein gegebener Punct, und jede Menge außer einander gegebener Puncte sind, ist möglich.

Postulat 5.

Die Linie mit zwey gegebenen Grenzpuncten, in oder außer der eine andre, und jede Menge dieser außer einander gegebener Linien ist, ist möglich.

Anschauungen der Linie aus der Zusammensetzung, und die daraus möglichen Arten derselben.

Anschauung 2.

Die Linie mit zwey Grenzpuncten ist, wie Fig. 2. AB, aus zwey Linien derselben Art AC, CB in einem gemeinschaftlichen Grenzpuncte C zusammengesetzt.

Erklärung.

Sie mag eine Linie der ersten Art heißen.

Anschauung 3.

Zwey Linien der ersten Art wie ABC, ADC, Fig. 3. in ihren zwey gemeinschaftlichen Grenzpuncten A, C, zusammengesetzt, sind eine Linie ABCD ohne Grenzpunct.

Erklärung.

Sie heiße eine Linie der zweyten Art.

Postulat

Postulat 6.

In oder außer einer Linie beyder Art ist ein Punct, und jede Menge in oder außer einander gegebener Puncte, möglich.

Anschauungen der Linie aus ihrer Theilung.

Anschauung 4.

Der Punct in einer Linie der ersten Art wie C, Fig. 2. theilt sie in zwey Linien AC, CB derselben Art, deren gemeinschaftlicher Grenzpunct er ist.

Anschauung 5.

Zwey Puncte in einer Linie der zweyten Art wie A, C, Fig. 3. theilen sie in zwey Linien ABC, CDA, der ersten Art, deren gemeinschaftliche Grenzpuncte sie sind.

Postulate und Anschauungen der Fläche.

Postulat 7.

Die Fläche mit einer gegebenen Grenzlinie der zweyten Art ist möglich.

Postulat 8.

Die Fläche mit einer gegebenen Grenzlinie der zweyten Art in oder außer der ein gegebener Punct, und jede Menge in oder außer einander gegebener Puncte ist, ist möglich.

Postulat 9.

Die Fläche mit einer gegebenen Grenzlinie der zweyten Art in oder außer der eine gegebene

Linie

Linie der ersten Art, und jede Menge in oder außer einander gegebener Linien dieser Art ist, ist möglich.

Postulat 10.

Die Fläche mit einer Grenzlinie der zweyten Art, in oder außer der eine andre solche gegebene Fläche, und jede Menge dieser in oder außer einander gegebener Flächen ist, ist möglich.

Anschauungen der Fläche aus der Zusammensetzung, und die daraus mögliche Arten derselben.

Anschauung 6.

Die Fläche mit einer Grenzlinie der zweyten Art ist, wie Fig. 3. ABCD aus zwey Flächen derselben Art ABCD, ACDA, in der gemeinschaftlichen Grenzlinie AC der ersten Art, zusammengesetzt.

Erklärung.

Sie mag eine Fläche der ersten Art heißen.

Anschauung 7.

Zwey Flächen der ersten Art, wie ABCGFE. ADCGHE, Fig. 4. in zwey gemeinschaftlichen Grenzlinien AE, CG, der ersten Art zusammengesetzt, sind eine Fläche ABCDEFGH mit zwey Grenzlinien der zweyten Art.

Erklärung.

Sie mag eine Linie der zweyten Art heißen.

An-

Anschauung 8.

Zwey Flächen der ersten Art, wie ABCDE, ABCDF, Fig. 5. in einer gemeinschaftlichen Grenzlinie ABCD der zweyten Art zusammengesetzt sind eine Fläche ABCDEFGH ohne Grenzlinie.

Erklärung.

Sie kann eine Fläche der dritten Art heißen.

Anschauung 9.

Zwey Flächen der zweyten Art, wie ABC DEFGHIK, GHIKLMABCD, Fig. 6. in zwey gemeinschaftlichen Grenzlinien ABCD, GHIK, der zweyten Art zusammengesetzt, sind eine Fläche ABCDEFGHIKLM, ohne Grenzlinie.

Erklärung.

Sie heiße eine Fläche der vierten Art.

Postulat 11.

In oder außer einer gegebenen Fläche jeder Art ist ein Punct, und jede Menge in oder außer einander gegebener Puncte, möglich.

Postulat 12.

In oder außer einer gegebenen Fläche jeder Art ist eine Linie der ersten Art, in oder außer der jede Menge in oder außer der Fläche, in oder außer einander gegebener Puncte ist, und jede Menge solcher außer einander gegebener Linien, möglich.

Postulat

Postulat 13.

In oder außer einer gegebenen Fläche jeder Art ist eine Linie der ersten Art, in oder außer der jede Menge in oder außer der Fläche solcher außer einander gegebener Linien ist, und jede Menge solcher außer einander gegebener Linien möglich.

Anschauungen der Fläche aus ihrer Theilung.

Anschauung 10.

Die Linie der ersten Art wie AC, Fig. 3. in einer Fläche ABCD der ersten Art, deren Grenzpuncte A, C, in ihrer Grenzlinie sind, theilt sie in zwey Flächen ABCD, ACDA, derselben Art, deren gemeinschaftliche Grenzlinie sie ist.

Anschauung 11.

Zwey Linien der ersten Art wie AE, CG, Fig. 4. in einer Fläche ABCDEFGH der zweyten Art, deren Grenzpuncte in den beyden Grenzlinien ABCD, EFGH sind, theilen sie in zwey Flächen der ersten Art ABCDFE, ADCAE, deren gemeinschaftliche Grenzlinien sie sind.

Anschauung 12.

Die Linie der zweyten Art wie ABCD Fig. 5. in einer Fläche ABCDEF der dritten Art, theilt sie in zwey Flächen der ersten Art ABCDE, ABCDF, deren gemeinschaftliche Grenzlinie sie ist.

Anschauung 13.

Zwey Linien der zweyten Art wie ABCD, GHIK Fig. 6. in einer Fläche der vierten Art, theilen sie in zwey Flächen der zweyten Art ABCDEFGHIK, GHIKLMABCD, deren gemeinschaftliche Grenzlinien sie sind.

Postulate und Anschauungen des Körpers.

Postulat 14.

Der Körper mit einer Grenzfläche der dritten Art ist möglich.

Postulat 15.

Der Körper mit einer Grenzfläche der dritten Art, in oder außer dem ein gegebener Punct, und jede Menge in oder außer einander gegebener Puncte ist, ist möglich.

Postulat 16.

Der Körper mit einer Grenzfläche der dritten Art, in oder außer dem eine gegebene Linie der ersten Art, und jede Menge solcher außer einander gegebener Linien ist, ist möglich.

Postulat 17.

Der Körper mit einer Grenzfläche der dritten Art, in oder außer dem eine gegebene Fläche der ersten Art, und jede Menge solcher außer einander gegebener Flächen ist, ist möglich.

Postulat 18.

Der Körper mit einer Grenzfläche der dritten Art, in oder außer dem ein anderer solcher gege-

gegebener Körper, und jede Menge dieser außer einander gegebener Körper ist, ist möglich.

Anschauungen des Körpers aus der Zusammensetzung, und die daraus erzeugten Arten desselben.

Anschauung 14.

Zwey Körper mit einer Grenzfläche der dritten Art wie ABCDE, ABCDF, Fig. 5. in einer gemeinschaftlichen Fläche der ersten Art ABCD zusammengesetzt, sind ein Körper ABCDEF mit einer Grundfläche der dritten Art.

Erklärung.

Er mag ein Körper der ersten Art heißen.

Anschauung. 15.

Zwey Körper der ersten Art wie ABCDE FGHIK, ABCDEFGHLM, Fig. 7. in einer gemeinschaftlichen Grenzfläche der zweyten Art ABCDEFGH zusammengesetzt, sind ein Körper ABCDEFGHIKLM mit zwey Grenzflächen der dritten Art.

Erklärung.

Er mag ein Körper der zweyten Art heißen.

Anschauung 16.

Zwey Körper der ersten Art wie ABCDE FGHIK, GHIKLMABCD, Fig. 6. in zwey gemeinschaftlichen Grenzflächen der ersten Art ABCD, GHIK, zusammengesetzt, sind

ein Körper ABCDEFGHIKLM mit einer Grenzfläche der vierten Art.

Erklärung.

Er mag ein Körper der dritten Art heißen.

Anschauung 17.

Zwey Körper der dritten Art wie ABCDEFGHIKLMOPQRSTV, NOPQRSV WXYZ, Fig. 8. in zwey gemeinschaftlichen Grenzflächen der zweyten Art ABCDEFGH, NOPQRSTV zusammengesetzt, sind ein Körper ABCDEFGHIKLMOPQRSV WXYZ mit zwey Grenzflächen der vierten Art.

Erklärung.

Er mag ein Körper der vierten Art heißen.

Postulat 19.

In oder außer einem Körper jeder Art ist ein Punct, und jede Menge in oder außer einander gegebener Puncte, möglich.

Postulat 20.

In oder außer einem Körper jeder Art ist eine Linie der ersten Art, in oder außer der jede Menge in oder außer einander gegebener Puncte ist, und jede Menge solcher außer einander gegebener Linien möglich.

Postulat 21.

In oder außer einem gegebenen Körper jeder Art ist eine Linie der ersten Art, in oder außer der jede Menge in oder außer dem Körper außer einan-

einander gegebener Linien ist, und jede Menge solcher außer einander gegebener Linien, möglich.

Postulat 22.

In oder außer einem gegebenen Körper jeder Art ist eine Fläche der ersten Art, in oder außer der jede Menge in oder außer dem Körper in oder außer einander gegebener Puncte ist, und jede Menge solcher außer einander gegebener Flächen, möglich.

Postulat 23.

In oder außer einem gegebenen Körper jeder Art ist eine Fläche der ersten Art, in oder außer der jede Menge in oder außer dem Körper außer einander gegebener Linien der ersten Art ist, und jede Menge solcher außer einander gegebener Flächen, möglich.

Postulat 24.

In oder außer einem gegebenen Korper jeder Art ist eine Fläche der ersten Art, in oder außer der jede Menge in oder außer dem Körper solcher außer einander gegebener Flächen ist, und jede Menge solcher außer einander gegebener Flächen, möglich.

Anschauungen des Körpers aus seiner Theilung.

Anschauung 18.

Die Fläche der ersten Art wie ABCD Fig. 5. in einem Körper ABCDEF der ersten

Art, deren Grenzlinie ABCD in seiner Grenzfläche ist, theilt ihn in zwey Körper ABCDE, ABCDF, derselben Art, deren gemeinschaftliche Grenzfläche sie ist.

Anschauung 19.

Die Fläche der zweyten Art wie ABCDE FGH, Fig. 7. in einem Körper ABCDEF GHIKLM der zweyten Art, deren Grenzlinien ABCD, EFGH, in seinen beyden Grenzflächen sind, theilt ihn in zwey Körper ABCDEFGHIK, ABCDEFGHLM der ersten Art, deren gemeinschaftliche Grenzfläche sie ist.

Anschauung 20.

Zwey Flächen der zweyten Art wie ABCD, GHIK, Fig. 6. in einem Körper der dritten Art, deren Grenzlinien ABCD, GHIK in seiner Grenzfläche sind, theilen ihn in zwey Körper ABCDEFGHIK, GHIKLMAB CD der ersten Art, deren gemeinschaftliche Grenzflächen sie sind.

Anschauung 21.

Zwey Flächen der zweyten Art wie ABCD EFGH, NOPQRSTV, Fig. 8. in einem Körper ABCDEFGHIKLMNOPQRST VWXYZ der vierten Art, deren Grenzlinien ABCD, EFGH und NOPQ, RSTV, in in seinen beyden Grenzflächen sind, theilen ihn

in

in zwey Körper ABCDEFGHIKLMNOP QRSTV, NOPQRSTVWXYZ, der ersten Art, deren gemeinschaftliche Grenzflächen sie sind.

Anmerkung zu den Postulaten der Verknüpfung der Anschauungen.

Dieß sind die ursprünglichen Postulate der Geometrie, die die Möglichkeit ihrer ursprünglichen Anschauungen und deren Verknüpfungen ausdrücken. Sie bestimmen also nichts in diesen Anschauungen, und können auch selbst nicht weiter in der Anschauung bestimmt werden, indem alle Anschauungen durch sie zuerst als möglich angesehen werden. Daß die Einbildungskraft durch Einwirkung des Verstandes jederzeit diese Anschauungen zu erzeugen im Stande ist, muß als ein reines Factum des Bewußtseyns angenommen werden. Und so wie alles, was auf irgend eine Weise ein Factum ist, es sey des äußern oder innern Sinnes, keinen apodictischen Beweis seines Daseyns zuläßt, so kann dem, der jenes Vermögen leugnet, eben so wohl sein eigenes Daseyn geleugnet werden. Die unmittelbaren Folgerungen aus diesen Postulaten sind der Kürze wegen ausgelassen, und können, da einige Anschauungen sie voraussetzen, in jedem Falle aus ihren ursprünglichen Postulaten leicht ergänzt werden. Eben so können einige Postulate, die eigentlich aus mehrern zu-

sammengesetzt sind, die zusammen auf eine Anschauung sich beziehen, zerlegt, und dadurch ihr Ausdruck deutlicher gemacht werden.

Anmerkung zu den Anschauungen.

Die hier aufgestellten Arten der Anschauungen liegen allen übrigen in der Geometrie, die nur abgeleitete sind, zum Grunde. Obgleich einige derselben aus andern zusammengesetzt, und in solche theilbar sind, so müssen sie doch zu den ursprünglichen gezählt werden, indem diese Zusammensetzung und Theilung selbst in allen auf verschiedene Weise bestimmt, und nicht wiederum von andern abgeleitet ist. Die Anschauungen der Fläche und des Körpers der vierten Art haben das Besondere, daß sie auf zweyerley Weise aus den gegebenen Anschauungen können zusammengesetzt, und in solche getheilt werden, welches bey keinen der übrigen der Fall ist. Beyderley Zusammensetzungen und Theilungen, obgleich sie bey der Ableitung anderer Anschauungen aus dieser, von einander müssen unterschieden werden, sind hier, da sie dieselbe Art der Anschauung geben, nicht weiter bestimmt worden. Von den abgeleiteten Arten der Anschauungen, worunter auch die, in denen eine der ursprünglichen Arten in die andre übergeht, gehören, sind keine, da sie aus diesen auch den Postulaten ohne weitern Zusatz zu geben sind, angeführt worden. So weit also die Geo-

Geometrie in der Ableitung dieser Anschauungen jemals gehen mag, so kann sie doch nichts weiter als diese ursprünglichen Arten ihrer Anschauungen enthalten. Also auch bey ihrer Anwendung auf die Natur, ist dieser dadurch eine Grenze vorgeschrieben, ihre Kräfte zur Bildung der Materie mögen nach jedem erkannten oder unerkannten Gesetze wirken.

Axiome der Verknüpfung der Anschauungen.

Axiome der Zusammensetzung.

Erklärung.

Die Linien, Flächen und Körper der ersten Art mögen schlechthin Linien, Flächen und Körper heißen.

Axiome der Zusammensetzung der Linie.

Axiom 1.

Die Linie ist in einem Puncte in der Grenzlinie einer Fläche aus zwey Theilen zusammengesetzt, wenn sie mit der Fläche in einer andern Fläche ist, und ihr einer Grenzpunct in, der andre außer der erstern Fläche ist.

Axiom 2.

Die Linie ist in einem Puncte in der Grenzfläche eines Körpers aus zwey Theilen zusammen-

mengesetzt, wenn ihr einer Grenzpunct in dem Körper, und der andere außer ihm ist.

Axiom der Zusammensetzung der Fläche.

Axiom 3.

Die Fläche ist in einer Linie in der Grenzfläche eines Körpers aus zwey Theilen zusammengesetzt, wenn ein Punct in ihrer Grenzlinie im Körper, und der andere außer ihm ist.

Axiom der Zusammensetzung des Körpers.

Axiom 4.

Der Körper ist in einer Fläche in der Grenzfläche eines Körpers aus zwey Theilen zusammengesetzt, wenn ein Punct in ihm, in dem letztern, und ein anderer außer ihm ist.

Erklärungen.

Die Linie begegnet einer andern, wenn ihr einer Endpunct in ihr ist.

Die Linie begegnet einer Fläche, wenn sie einen Grenzpunct in ihr hat.

Die Fläche begegnet einer andern in einer Linie, oder einem Puncte, wenn im ersten Fall ihre

ihre Grenzlinie oder ein Theil derselben, und im andern ein Punct in ihr, in der andern Fläche ist.

Ferner:

Die Linie wird von einer andern in derselben Fläche in einem, beyden gemeinschaftlichen, Puncte geschnitten, wenn ihr einer Theil in, der andere außer der Fläche ist, zu deren Grenze die andere Linie gehört.

Die Fläche wird von einer andern in einer, beyden gemeinschaftlichen, Linie geschnitten, wenn sie einen Theil in, und den andern außer dem Körper hat, dessen Grenze die andere ist.

Endlich:

Die Linie berührt eine andere in derselben Fläche in einem, beyden gemeinschaftlichen, Puncte, wenn ihre beyden Theile entweder in, oder außer der Fläche sind, zu deren Grenze die andere gehört.

Die Linie berührt eine Fläche in einem, beyden gemeinschaftlichen, Puncte, oder in einer, beyden gemeinschaftlichen, Linie, wenn sie im ersten Fall entweder in, oder außer dem Körper, diesen Punct ausgenommen, ist, dessen Grenze die andere enthält, und im andern Fall ihre beyden Theile entweder in, oder außer diesem Körper sind.

Axiome der Theilung.

Axiome der Theilung der Linie.

Axiom 5.

Die Linie wird durch die Grenzlinie einer Fläche in einem, beyden gemeinschaftlichen, Puncte in zwey Theile getheilt, wenn sie mit dieser Fläche in einer andern, und ihr einer Grenzpunct in, der andere außer der erstern Fläche ist.

Axiom 6.

Die Linie wird durch die Grenzfläche eines Körpers in einem, beyden gemeinschaftlichen, Puncte getheilt, wenn ihr einer Grenzpunct in dem Körper, der andere außer ihm ist.

Axiom der Theilung der Fläche.

Axiom 7.

Die Fläche wird durch die Grenzfläche eines Körpers in einer, beyden gemeinschaftlichen, Linie in zwey Theile getheilt, wenn ein Punct in ihr im Körper, und ein anderer außer ihm ist.

Axiom der Theilung des Körpers.

Axiom 8.

Der Körper wird durch die Grenzfläche eines Körpers in zwey Theile in einer, beyden gemeinschaftlichen, Fläche getheilt, wenn ein Punct in ihm in diesem Körper, und ein anderer außer ihm ist.

Anmer=

Anmerkung zu den Axiomen der Verknüpfung der Anschauungen.

Diese Axiome enthalten die ursprünglichen Bedingungen, unter denen eine Zusammensetzung und Theilung der Anschauungen nothwendig ist, so wie die vorigen Postulate und die aus ihnen möglichen Anschauungen diese Bedingungen selbst möglich machen. Sie bestimmen also eine Anschauung vermittelst ihrer Verbindung mit andern durch diese Begriffe der Zusammensetzung und Theilung, nicht aber durch Voraussetzung einer Anschauung und eines Begriffs derselben, welches eine zweyte Classe der Axiomen ausmachen wird. Uebrigens ist leicht zu sehen, daß es nur nöthig war, jene Axiome bloß auf die Linien, Flächen und Körper der ersten Art zu beziehen, indem die Anwendung auf die übrigen durch ihre Zusammensetzung und Theilung keine ursprünglichen Axiome dieser Art giebt.

II. Principien der Vergleichung der Anschauungen.

Postulate und Axiome der Gestalt.

Erklärung.

Eine Anschauung ist mit einer andern übereinstimmend, wenn in ihr kein von der andern gegebener Unterschied möglich ist.

Axiom

Axiom der Gestalt des Puncts.

Axiom 9.

Der Punct ist mit einem andern gegebenen Puncte übereinstimmend.

Postulate und Axiome der Gestalt der Linie.

Postulat 25.

Die Linie ABC Fig. 11 und 12. mit gegebenen Endpuncten A, B, die mit einer andern außer ihr gegebenen Linie ADB mit denselben Endpuncten A, B, übereinstimmt, und deren übereinstimmende Theile AC, AD, den einen Endpunct A gemein haben, ist möglich, es mag entweder eine dritte übereinstimmende Linie AEB, die mit ihr eine Linie der zweyten Art ACBE ist, welche mit der Linie der zweyten Art ACBD, die sie mit der andern macht, übereinstimmt, möglich seyn, oder nicht.

Postulat 26.

Die Linie ACBF, Fig. 11 und 12. die mit einer andern ADGB, außer ihr übereinstimmt, mit deren einem Theile ADB ihr einer Theil ACB mit denselben Endpuncten A, B, übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 27.

Die Linie ACB, Fig. 11 und 12. mit gegebenen Endpuncten A, B, die mit jeder andern mit denselben Endpuncten übereinstimmt, und mit ihr nur eine Linie ist, ist möglich.

Erklä-

Erklärungen.

Eine solche Linie heißt eine gerade Linie. Jede Linie aber, die weder selbst, noch in einem Theile eine gerade Linie ist, heißt eine krumme Linie.

Axiom 10.

Die gerade Linie ACB, Fig. 11. die mit einer andern ADB dieselben Endpuncte A, B, hat, ist mit ihr nur eine.

Postulat 28.

Die gerade Linie ACBF, Fig. 11. die mit einer andern übereinstimmenden ACBG, denselben Endpunct A, und einen gemeinschaftlichen Theil ACB hat, ist mit ihr nur eine gerade Linie ACBF.

Postulat 29.

Die gerade Linie, die ein Theil einer mit einem gemeinschaftlichen Endpunct gegebenen geraden Linie ist, der größer als eine andere gegebene Linie, und die mit dieser übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 30.

Die gerade Linie, deren einer Theil mit einem Theile einer gegebenen geraden Linie übereinstimmt, und die mit dieser übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 31.

Die Linie, die mit einer geraden, gemeinschaftliche Endpuncte hat, und mit einer gegebenen

benen Linie, die mit einer andern übereinstimmenden geraden Linie dieselben Endpuncte hat, übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 32.

Die Linie beyder Art, die mit einer andern übereinstimmt, deren einer Theil mit einem Theile einer andern gegebenen übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 33.

Die Linie, die ein Theil einer gegebenen Linie beyder Art, die mit einer andern übereinstimmt, ist, und die mit einem Theile dieser übereinstimmt, ist möglich.

Postulate und Axiome der Gestalt der Fläche.

Postulat 34.

Die Fläche ADCEBFG, Fig. 13. in deren Grenzlinie ADCEBFA drey der Grenzlinie AHCIBKA einer andern Fläche AHCIBKL außer ihr, gemeinschaftliche Puncte sind, und die mit ihr übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 35.

Die Fläche AFBGADCMA, Fig. 13. die mit einer andern AKBLAHCNA übereinstimmt, und deren einer Theil ADCEBFGA mit einem Theile AHCIBLKA der andern, wenn

wenn beyder Grenzlinien ADCEBFA, AHC IBKA drey gemeinschaftliche Puncte A, C, B, haben, übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 36.

Die Fläche ADCBFG, Fig. 13. deren Grenzlinie ADCEBFA mit der Grenzlinie AHCIBKA einer jeden andern Fläche AHCIBKL, die mit ihr übereinstimmt, drey gemeinschaftliche Puncte A, B, C, hat, die nicht in gerader Linie sind, und die mit ihr nur eine Fläche ADCEBFG ist, ist möglich.

Erklärungen.

Eine solche Fläche heißt eine gerade Fläche, oder Ebene. Jede Linie aber, die weder selbst, noch in einem Theile eine Ebene ist, heißt eine krumme Fläche.

Axiom 12.

Die Ebene ADCEBFG, Fig. 13. die mit einer andern AHCIBKL drey gemeinschaftliche Puncte A, B, C, die nicht in gerader Linie sind, hat, ist mit ihr zusammen nur eine Ebene.

Postulat 37.

Die Ebene, die einen Punct in ihrer Grenzlinie in einem Körper hat, und die seiner Grenzfläche begegnet, ist möglich.

Axiom 13.

Die Ebene ABGADCMA, Fig. 13. die mit einer andern AKBLAHCNA einen gemein-

meinschaftlichen Theil ADCBFGA, hat, ist mit ihr zusammen nur eine Ebene.

Axiom 14.

Die gerade Linie, deren Endpuncte in einer Ebene sind, und die ihre Grenzlinie nicht schneidet, ist in der Ebene.

Axiom 15.

Die gerade Linie, deren einer Theil in einer Ebene ist, und die ihre Grenzlinie nicht schneidet, ist in dieser Ebene.

Postulat 38.

Die gerade Linie, deren einer Endpunct in einer Ebene ist, und die ihrer Grenzlinie begegnet, ist möglich.

Postulat 39.

Die Fläche, die mit einer gegebenen Fläche eine übereinstimmende Grenzlinie hat, und mit ihr übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 40.

Die Fläche, die ein Theil einer gegebenen Fläche jeder Art, die mit einer andern übereinstimmt, ist, und die mit einem gegebenen Theile derselben übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 41.

Die Fläche jeder Art, deren einer Theil mit einem gegebenen Theile einer andern überstimmt, und die mit dieser übereinstimmt, ist möglich.

Postulate und Axiom der Gestalt des Körpers.

Axiom 16.

Der Körper jeder Art, dessen Grenzfläche mit der Grenzfläche eines gegebenen Körpers übereinstimmt, ist mit diesem übereinstimmend.

Postulat 42.

Der Körper, der ein Theil eines gegebenen Körpers jeder Art, der mit einem andern übereinstimmt, ist, und der mit einem gegebenen Theile desselben übereinstimmt, ist möglich.

Postulat 43.

Der Körper jeder Art, dessen einer Theil mit einem gegebenen Theile eines andern übereinstimmt, und der mit diesem übereinstimmt, ist möglich.

Erklärungen.

Uebereinstimmende Linien, die Theile der Grenzlinie einer Fläche sind, mögen in derselben in entgegengesetzter Ordnung übereinstimmend heißen, wenn die beyden übereinstimmenden Theile beyder, zu demselben einen Theile der Grenzlinie gehören, und beyde übereinstimmende Flächen, zu deren Grenzlinien die gegebenen übereinstimmenden Linien gehören, entweder in oder außer der erstern Fläche sind.

Sie mögen aber in einerley Ordnung in der Fläche übereinstimmend heißen, wenn die eine in, die andre außer der Fläche ist.

Uebereinstimmende Flächen, die Theile der Grenzfläche eines Körpers sind, mögen übereinstimmend in entgegengesetzter Ordnung heißen, wenn die übereinstimmenden Theile beyder zu demselben einen Theil der Grenzfläche gehören, und beyde übereinstimmende Körper, zu deren Grenzflächen die gegebenen übereinstimmenden Flächen gehören, entweder in, oder außer dem ersten Körper sind.

Sie mögen aber in einerley Ordnung übereinstimmend heißen, wenn die eine in, und die andre außer dem Körper ist.

Uebereinstimmende Körper mögen in entgegengesetzter Ordnung übereinstimmend heißen, wenn die übereinstimmenden Theile ihrer Grenzfläche in entgegengesetzter Ordnung übereinstimmend sind.

Sie mögen aber in einerley Ordnung übereinstimmend heißen, wenn diese übereinstimmenden Theile ihrer Grenzfläche in derselben Ordnung übereinstimmend sind.

Anmerkung zu den Postulaten der Gestalt.

Diese doppelte Art der Uebereinstimmung zweyer Anschauungen ist, da kein Begriff allein ihren Unterschied bestimmt, merkwürdig, und in der Metaphysik ein wichtiges Beyspiel, den Unterschied der beyderley Erkenntnißelemente zu bestätigen, so wie Principien, die auf beyde können bezogen werden, für die Geometrie, da-

mit sie alle möglichen Anschauungen, und nicht ihre Hälfte, befasse, nothwendig sind. So viel bekannt, sind beyde Arten zwar bemerkt, aber nicht durch eine echte Bestimmung in der reinen Anschauung unterschieden worden. Ihr Unterschied wird gewöhnlich dadurch, daß gewisse übereinstimmende Anschauungen einer Art sich decken können, die der andern aber nicht, angegeben. Allein in der Geometrie ist dieser Unterschied schon wegen der empirischen Vorstellung der Bewegung und des Deckens unecht, dann auch wird ferner dieser Unterschied niemals in ihr, wie der hier gegebene, angewandt, und endlich faßt er nicht alle Anschauungen, die in diesem, als zu einer der beyden Arten gehörig, bestimmt sind, in sich. Kant hat vorzüglich in den Prolegomenen zur künftigen Metaphysik allgemein bemerkt, daß dieser Unterschied nicht durch Begriffe, sondern durch davon verschiedene Anschauungen könne gegeben werden, aber, wie es dort nicht nöthig war, denselben in der Anschauung nicht weiter als durch Beyspiele erklärt. Diese findet man fast durchgängig in der thierischen Schöpfung, den Schollfisch und vielleicht wenige andere Thiere ausgenommen, ausgeführt, indem jeder Theil des Thiers in seiner Gestalt einen andern mit ihm übereinstimmenden, in entgegengesetzter Ordnung, hat, oder, wenn er nur einmal vorhanden, in solche Theile kann zerlegt werden.

Anmerkung zu den Axiomen der Gestalt.

Von diesen Axiomen hängen alle Bestimmungen der Anschauungen, in so fern sie zur Gestalt gehören, ab, die nämlich bey den Linien und Flächen vermittelst der geraden Linie und Ebene mit ihren Axiomen geschehen, wodurch also auch die Grenzflächen der Körper, mithin diese selbst, durch Voraussetzung ihres Axioms in dieser Absicht bestimmt werden. Die geraden Linien und Ebenen nämlich sind einzig, und durch die wenigsten Bedingungen, die ersten z. B. durch zwey Endpuncte, und die letztern durch drey Puncte, die nicht in gerader Linie sind und ihre Grenzlinie, gegeben, welches, wie aus den Postulaten erhellet, von keiner krummen Linie oder Fläche gilt. Dadurch sind sie also als solche, an denen zuletzt alle Bestimmungen der letztern ausgedrückt werden können, anzusehen. Euklides hat von diesen Axiomen nur das in (10), oder, wie es bey ihm ausgedrückt ist, zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein, das einzige wahre synthetische Axiom in seiner Geometrie, indem das achte empirisch ist, das zehnte und eilfte Lehrsätze, und die übrigen bloß analytisch sind, die ihm doch ohne jene synthetischen, die er stillschweigend voraussetzt, nichts helfen konnten.

Anmerkung zu den besondern Postulaten der geraden Linie und Ebene.

Euklides hat statt des Postulats (27) für die gerade Linie, ihre Möglichkeit zwischen je zwey Puncten, ohne hinreichende Bestimmungen derselben, angenommen; denn was seine erste Erklärung betrifft, daß sie eine Länge ohne Breite sey, so gilt dieß auch von der krummen, und die zweyte, daß sie allen Puncten in ihr gleichförmig liege, ist ohne weitere Bestimmung unverständlich. Man weiß also im Postulate gar nicht, wodurch die gerade Linie sich von jeder andern unterscheidet, bis das Axiom, zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein, das Verhältniß derselben im Postulate selbst aufgenommen sind. Es wird nämlich darinn bestimmt, daß die gerade Linie eine Linie der ersten Art sey, und mit jeder andern, mit der sie zwey gemeinschaftliche Endpuncte hat, ebenfalls eine solche ausmache. Eben so verhält es sich mit dem Postulate (36) der Ebene, in welchem ausgesagt wird, daß die Ebene eine Fläche der ersten Art, also keine Grenzfläche eines Körpers, sey, und auch mit einer andern, die drey Puncte in ihr hat, die nicht in gerader Linie sind, keinen Körper begrenzt. In den Postulaten der Erzeugung der Anschauungen einer Gattung überhaupt, wurden zwar auch keine Bestimmungen derselben ausgedrückt, weil diese nicht vor ihr gegeben sind, sondern erst durch

ihre Erzeugung möglich werden. Daß also diese Postulate nichts weiter enthalten, als die Möglichkeit einer gewissen Anschauungsart, dem Schema gewisser Anschauungen, indem eine derselben wirklich erzeugt, und mit dem Bewußtseyn der Möglichkeit, die Sphäre des Schema's auszufüllen, verbunden wird. Denn die vorausgehenden transcendentalen Bestimmungen, z. B. daß sie ausgedehnte stetige Größen seyn müssen, sind selbst nicht vor der Erzeugung der Anschauung, sondern erst durch sie in derselben gegeben, und nur solche gehören zur Geometrie. Aber die Postulate, die nicht die Anschauungen einer Gattung überhaupt betreffen, sondern nur ein bestimmtes Geschlecht derselben, wie die geraden Linien und Ebenen, müssen nothwendig unterscheidende Bestimmungen derselben enthalten. Die genannten Postulate enthalten nun zwar die folgenden Axiome (10. 12.) der geraden Linie und Ebene, die aber so klein als möglich ist, statt daß sie ihre Stelle vertreten würden, wenn sie solche ganz einschlössen, welches aber der Natur eines Postulats zuwider ist.

Postulate und Axiome der Größe der Anschauungen.

Postulate der Größe der Anschauungen.

Postulat der Größe der Linie.

Postulat 44.

Die Linie, deren Größe der Größe einer gegebenen Linie gleich ist, und die entweder ein Theil einer gegebenen Linie, oder deren einer Theil eine gegebene Linie ist, ist möglich.

Postulat der Größe der Fläche.

Postulat 45.

Die Fläche, deren Größe der Größe einer gegebenen Fläche gleich ist, und die entweder ein Theil einer gegebenen Fläche, oder deren einer Theil eine gegebene Fläche ist, ist möglich.

Postulat der Größe des Körpers.

Postulat 46.

Der Körper, dessen Größe der Größe eines gegebenen Körpers gleich ist, und der entweder ein Theil eines gegebenen Körpers, oder dessen einer Theil ein gegebener Körper ist, ist möglich.

Axiome der Größe der Anschauungen.

Erklärung.

Eine Linie, deren Theile gerade Linien sind, heißt eine gebrochene Linie, und die gemeinschaftlichen Grenzpuncte ihrer Theile, Winkelpuncte.

Axiom der Größe der Linie.

Axiom 17.

Es ist eine Menge der geraden Theile AC, CD, DB, einer gebrochenen Linie ACDB, Fig. 12. die mit der krummen, in der ihre Winkelpuncte C, D, sind, gemeinschaftliche Endpuncte A, B, hat, möglich, daß die Größe der gebrochnen Linie von der Größe der gegebenen krummen Linie, um die Größe einer gegebenen Linie F, unterschieden ist, die kleiner ist, als jede gegebene Linie G.

Erklärung.

Eine Fläche, deren Theile Ebenen sind, heißt eine gebrochene Fläche, die gemeinschaftlichen Grenzlinien ihrer Theile, Winkelseiten, und die gemeinschaftlichen Endpuncte dieser, Winkelpuncte.

Axiom der Größe der Fläche.

Axiom 18.

Es ist eine Menge der ebenen Theile ABCD, BCD, ACD, einer gebrochenen Fläche ABCD, Fig. 13. deren Winkelpuncte wie D in

einer

einer krummen Fläche, so wie die Winkelpuncte A, B, C ihrer Grenzlinie ABC, in der Grenzlinie ABC, der krummen sind, möglich, daß die Größe der gebrochenen Fläche von der Größe der krummen, um eine gegebene Fläche F, unterschieden ist, die kleiner ist, als jede gegebene Fläche G.

Axiom der Größe des Körpers.

Axiom 19.

Es ist eine Menge der ebenen Theile ABE, EBC, ECD, EDA, ADF, DFC, CFB, BFA, der gebrochenen Grenzfläche ABCDEF Fig. 14. eines Körpers, deren Winkelpuncte A, B, C, D, E, F, in der krummen Grenzfläche des Körpers sind, möglich, daß die Größe des durch sie begrenzten Körpers um die Größe eines Körpers I, unterschieden ist, der kleiner ist, als jeder gegebene Körper K.

Anmerkung zu den Postulaten der Größe.

Diese Postulate enthalten die Möglichkeit einer allgemeinen Größenvergleichung der Anschauungen, in jeder der dreyerley Arten derselben. Es scheint merkwürdig, daß, da diese Anschauungen in Absicht der Gestalt unendlich verschieden seyn können, sie dennoch in Absicht der Größe als einerley können angesehen werden, und zeigt also an, daß in ihnen eine gewisse Einheit ihrer Erzeugung in der Zeit

zum Grunde liegen müsse, die hier der reine Verstandesbegriff der Größe ist, der dieser Erzeugung die Regel giebt, welches auch der Grund der Evidenz dieser Postulate ist. Daß es aber im Raum dreyerley Arten der Anschauung giebt, die einander in der Ordnung begrenzen, also als Größen nicht vergleichbar sind, muß zwar im Raum, als ursprüglicher Beschaffenheit des Gemüths, außer der Categorie seinen Grund haben, aber worinn dieser bestehe, wird wenigstens dem Menschen, der seine Anschauungsart selbst nicht wiederum anschaut, unerklärlich bleiben.

Anmerkung zu den Axiomen der Größe.

Archimedes hat zum Behuf seiner Exhaustionsmethode andere Axiome der Größe, denen man aber nicht die gehörige Evidenz als solcher zugestanden hat. Sie enthalten nämlich nicht allein die bloßen Bedingungen der Möglichkeit einer Größenbestimmung überhaupt, sondern schon selbst eine solche, welche niemals Axiome geben kann. Vorzüglich aber fehlt die Evidenz denjenigen seiner Axiome, deren Gebrauch darinn besteht, eine Anschauung zu geben, die größer als eine gegebene ist, so sehr, daß z. B. die Lehrsätze im ersten Buche Euklides mit vielleicht größerem Rechte als Axiome gelten könnten. Der Gebrauch der zweyerley Grenzen in den Beweisen der Sätze, die die Größe einer Anschauung,

schauung, die sie einschließen, betreffen, und der ihnen den Schein einer größern Schärfe giebt, ist nach den hier gegebenen Axiomen zwar nicht möglich, aber auch überhaupt nicht nothwendig, indem es hinreicht, eine Größe zu geben, die von der durch sie zu bestimmenden, keinen möglichen Unterschied hat. Daß aber diese Axiome, so wie die Archimedischen, als allgemeine Lehrsätze der höhern Geometrie zu beweisen sind, ist nie zu besorgen, indem durch sie die allgemeine Größenbestimmung der Anschauungen zuerst als möglich anzusehen ist, und eben, weil sie nichts weiter als diese Möglichkeit enthalten, sind sie Principien. So erlaubt z. B. das erste derselben, die Größe der geraden Linie, die mit einer krummen dieselben Endpuncte hat, mit der Größe dieser entweder gleich, oder auch größer anzunehmen, und daß beydes nicht sey, muß erst aus ihm in Verbindung mit gewissen Lehrsätzen von der geraden Linie bewiesen werden. Der neueste Versuch aber, einige der Archimedischen Axiome, den Hr. Hofpr. Schultz im 45. Satz seiner Geometrie gemacht hat, zu beweisen, kann schwerlich einem Beweise im Euklid, oder auch selbst vielen strengern Beweisen dieses Geometers, an die Seite gestellt werden, und ist eine Folge der von ihm angenommenen Lieblingsidee des Unendlichen. Es ist merkwürdig, daß dieser vortreffliche Denker diese Idee, deren Gebrauch

vor-

vorzüglich in seiner sogenannten Meßkunst des Unendlichen, einem sinnreichen mathematischen Spiele, weit getrieben ist, sie selbst in der Elementargeometrie anwendet, da sie nicht einmal in der höhern Analytik und Geometrie als Beweisgrund nothwendig ist, sondern höchstens nur zur Verkürzung des Vortrags kann erlaubt werden. In dieser Absicht ist diese Idee auch nur in des Hrn. Hofr. Kästners Analysis des Unendlichen beybehalten worden, der aber die wahren Gründe der Bestimmung der Grenzen veränderlicher Größen beygefügt worden, von denen nachher die Preißschrift des Hrn. L'Huillier die Ausführung enthält. Es ist aber wohl nicht zu befürchten, daß der Geschmack an Beweisen aus dieser Idee die echten verdrängen werde, denn in jenen gehorcht der Verstand den Gesetzen einer fremden Kraft, die ihn ihre Ueberlegenheit fühlen läßt, ohne ihm dafür die mindeste Einsicht zu verschaffen, statt daß er in diesen durch seine eigenen Gesetze sich bestimmt, und die Geschwindigkeit einer Luftfahrt desselben, auf den Flügeln des Unendlicheu, die er selbst nicht wahrnehmen, sondern nur am Ende der Fahrt überschlagen kann, verursacht zwar wegen dieses Wunderähnlichen ein angenehmes Erstaunen, das aber mit der Befriedigung, die die Einsicht verschafft, nicht im mindesten zu vergleichen ist.

Uebrigens erhellet leicht, daß, ob zwar die Axiome der Größe dem Verfahren der ältern Geometrie, die jeden Schritt zur Bestimmung der Anschauungen in ihnen selbst darstellt, gemäß ausgedrückt worden, sie doch auch dem, der neuern zum Grunde liegen, die nämlich aus einer zum Grunde gelegten Anschauung das Gesetz des Zusammenhanges der Größen in ihr, in einer Gleichung ausdrückt, und durch die Eigenschaften der Größen überhaupt in ihr, die der Größe in der gegebenen Anschauung bestimmt. Denn die Größenbestimmungen der Anschauungen, auf solche, der Größen überhaupt zu bringen, und diese nachher wiederum auf jene zu beziehen, müssen ihre Axiome zuvor in den Anschauungen selbst gegeben seyn, obgleich diese allein nicht hinreichen, dieses Verfahren in aller Strenge zu beweisen, sondern ein eigenes System der Principien desselben erfordern, zu welchem auch schon einzelne Versuche vorhanden sind. Vorzüglich nothwendig ist dasselbe beym Gebrauch der höhern Analytik in der Geometrie, wobey wegen der großen Entfernung ihrer Größenbestimmung von der zum Grunde gelegten Anschauung, ihre Beziehung auf solche oft vieldeutig, ja wohl ungereimt zu seyn scheint.

Allgemeines Postulat der Größe der Anschauungen.

Postulat 47.

Die Größe der Linie, Fläche und des Körpers, die entweder so groß, oder größer als die Größe einer gegebenen Linie, Fläche oder eines Körpers ist, ist durch Zusammensetzung der Größe einer gegebenen kleinern Linie, Fläche oder eines Körpers, möglich.

Anmerkung zum allgemeinen Postulat der Größe.

Dieses Postulat liegt den Anschauungen, in so fern die eine aus der andern, als ihrem Maaß, erzeugt, angesehen wird, zum Grunde, und ist also darinn von denen, die die bloße Erweiterung einer Anschauung zu einer gegebenen Grenze betreffen, unterschieden. Es ist kein der Geometrie eigenthümliches Postulat, sondern mehr die Anwendung eines Princips der Größen überhaupt, auf die im Raum. Aber gleichwohl ist es, da die Möglichkeit dieser Anwendung nicht von selbst erhellet, sondern schon Principien der Geometrie voraussetzt, besonders in ihr anzuführen. Euklides hat dasselbe in seinen arithmetischen Büchern, zwar nicht als Postulat ausdrücklich aufgenommen, welches überhaupt nicht zu geschehen pflegt, sondern nur stillschweigend vorausgesetzt. Sonst kann hier im Vorbeygehen bemerkt werden, daß es das

einzige ist, das der höhern Analytik in ihrer Bestimmung der Grenzen veränderlicher Größen zum Grunde liegt.

Allgemeine Anmerkung zu den Principien der Geometrie.

Principien der Geometrie enthalten nichts weiter, als die Bestimmung ihrer reinen ursprünglichen Anschauungen, durch Begriffe. Sie unterscheiden sich also darinn von den Principien der Philosophie, die wohl die nothwendige Beziehung der Begriffe auf Anschauungen überhaupt, reinen und empirischen, enthalten, aber in diesen selbst nichts weiter bestimmen, obgleich durch ihre Voraussetzung das letzte erst möglich ist. Diese geometrische Principien sind von zweyerley Beschaffenheit. Entweder setzen sie bloß die Möglichkeit einer Anschauung, welches zwar keine Bestimmung in ihr ist, aber doch die nothwendige Bedingung derselben, und als solche zu den Principien der Geometrie gehört; oder sie bestimmen sie selbst nach einem Begriffe. Die erstern, die Postulate heißen, können wieder die Möglichkeit einer Anschauung und ihre Verknüpfung mit einer andern, oder noch einer andern und einem Begriffe derselben, welches hier die Postulate und die zu ihnen gehörigen Anschauungen der Verknüpfung und Vergleichung sind, enthalten, da denn die ersten entweder die Möglichkeit der Zusammen-

setzung

setzung und Theilung der Anschauungen, so wie die andern die der Gestalt und Größe derselben, also nach Begriffen von ihnen, betreffen. Die andern Principien, welche Axiome heißen, bestimmen entweder die Anschauungen durch ihre Verknüpfung, vermittelst eines Begriffs, oder nach einer andern und einem Begriffe derselben, da denn die ersten, Axiome aller Verknüpfungen, die der Zusammensetzung und Theilung, so wie die andern, aller Vergleichungen entweder der Gestalt oder der Größe der Anschauungen sind. Bey Aufstellung dieser Principien kömmt es zuerst darauf an, daß sie rein geometrisch sind, und also keine empirische oder auch philosophische Bestimmungen enthalten, dann, daß sie ursprünglich sind, und von den abgeleiteten unterschieden werden, wenn diese der Zusammenhang nöthigt mitzunehmen, und endlich, daß ihr System vollständig ist. Das erste ist leicht durch Vermeidung der fremden Bestimmungen zu beobachten, die sich darinn allgemein von den echten unterscheiden, daß sie, in der empirischen Anschauung und deren Begriffe zu viel, oder im andern Fall, da ihnen eine Anschauung fehlt, zu wenig enthalten. Eben so leicht kann die Verwechselung eines ursprünglichen Princips mit einem abgeleiteten, und umgekehrt, durch einen Versuch der Zerlegung in ein höheres vermieden werden, obschon hier das Mehrere und Mindere nicht, wegen seiner

Ungleich-

Ungleichartigkeit mit der übrigen Vorstellung, wie vorhin sich kenntlich macht. Was die Vollständigkeit betrifft, so kann man sich derselben, unter Voraussetzung der Vollständigkeit der ursprünglichen Anschauungen und der sie bestimmenden Begriffe, aus ihrer möglichen ursprünglichen Verbindung, versichern. Aber jene Voraussetzung selbst apodictisch zu beweisen, dürfte wohl keinem menschlichen Scharfsinne möglich seyn. Ein Princip, das die Erforschung der Principien einer Wissenschaft leitet, giebt zwar denselben systematischen Zusammenhang, und bestimmt die Beschaffenheit des anzubauenden Bodens, aber seine Größe kann nur durch die Ermessung des Bodens außer ihm, der doch nie gegeben ist, begrenzt werden. Man kann also jedes mögliche Princip, ob es zum System gehöre oder nicht, nach jenem bestimmen, aber es bleibt immer (logisch) möglich, daß ihre Menge die jedesmal gefundene übertrifft.

Gebrauch einiger der gegebenen Principien in den ersten Lehrsätzen der Geometrie.

Erklärung. Eine mit einer Linie ABC der zweyten Art (Fig. 15.) begrenzte Ebene heißt eine Figur.

1. Satz.

Eine gerade Linie in einer Ebene (Ax. 14.) begrenzt keine Figur.

Beweis. Gesetzt, sie wäre die Grenze ABC einer Figur, so seyen A, B, zwey Puncte in ihr (Post. 6.), daß also (Ansch. 5.) zwey gerade Linien AB, ACB, zwey gemeinschaftliche Endpuncte A, B, haben, gegen (Ax. 10.).

2. Satz.

Zwey gerade Linien in einer Ebene begrenzen keine Figur.

Beweis. Gesetzt, ABC, (Fig. 15.) wäre die Grenze dieser Figur, und die zwey gerade Linien AB, ACB, ihre Theile, die (Ansch. 3.) die Puncte A, B, gemein haben; also nach (Ax. 10.) nur eine gerade Linie sind, welches sich widerspricht.

Erklärung. Zwey gerade Linien in einer Ebene, wie AB, AC, (Fig. 15.), mit einem gemeinschaftlichen Endpuncte, heißen ein Winkel, die beyden geraden Linien AB, AC, seine Schenkel, und ihr gemeinschaftlicher Endpunct A, sein Scheitel.

3. Satz.

Drey gerade Linien in einer Ebene, die je zwey einen gemeinschaftlichen Endpunct haben, begrenzen keine Figur.

Beweis. Denn da die erste gerade Linie AB (Fig. 16.), mit der zweyten BC, den Punct B, gemein hat, so sind sie zusammen (Ansch. 2.)

eine

eine Linie, und da die dritte gerade Linie AC, mit ihr die Endpuncte A, C, und nicht mehr (Ax. 10.) gemein hat, so sind ABC, AC, Grenzen einer Figur (Ansch. 3. 5.).

Erklärung. Eine von drey geraden Linien begrenzte Ebene heißt ein ebenes geradelinigtes Dreyeck; die drey gerade Linien heißen seine Seiten, die drey Winkel je zweyer, seine Winkel, und ihre Scheitel, seine Ecken oder Spitzen.

4. Satz.

Die Verlängerung einer Seite eines Dreyecks, ist außer ihm.

Beweis. Es sey BD (Fig. 16.), die Verlängerung der Seite AB, des Dreyecks ABC. Wäre sie, oder ein Theil von ihr, wie BE, im Dreyeck, so hätte sie außer B, noch einen Punct wie G, in einer der beyden andern Seiten desselben (Post. 38.), gegen (Ax. 10.). Eben so, wenn sie in einer Seite wäre.

5. Satz.

Eine gerade Linie, deren Endpuncte in zweyen Seiten eines Dreyecks sind, ist in ihm, und ihre Verlängerung außer ihm.

Beweis. Es sey AG (Fig. 18.) die gerade Linie, deren Endpuncte A, G, im Winkel A, und der entgegengesetzten Seite BC, des Dreyecks ABC sind. Wäre sie, oder ein Theil von ihr, wie AIG außer ihm, so sind die Dreyecke ABC, AIGBA, (3. Satz) die beyden Theile

des Dreyecks AIGCA, und ABC ihre gemeinschaftliche Grenze (Ansch. 6. 10.) in ihr Also ist die Verlängerung BD von AB entweder in einem oder dem andern Theile (Ax. 15.), gegen (4. Satz).

Ferner sey GH die Verlängerung von AG, so ist sie (4. Satz) in keinem der beyden Dreyecke ABG, AGC, die zusammen das Dreyeck ABC, nach vorigem sind, außer dem sie also ist.

Eben so folgt der Beweis, wenn der Punct A, nicht im Winkel A, sondern in AB genommen wäre.

6. Satz.

Zwey gerade Linien, die ein gemeinschaftlicher Punct theilet, schneiden einander in ihm.

Beweis. Es seyen AG, BF (Fig. 16.) die geraden Linien, deren gemeinschaftlicher Punct E ist. Man ziehe BA, BG (Post. 27.), so ist (5. Satz) BE im Dreyeck ABG, mithin EF (5. Satz) außer ihm, und AG, BF, schneiden also (Ax. 5.) einander in E.

Erklärung. Zwey Puncte in einer Ebene, wie C, E, (Fig. 26.) sind auf entgegengesetzten Seiten einer geraden Linie AB, in dieser Ebene, wenn sie entweder in den beyden Grenzlien ACF, AEF, zweyer Figuren AFC, AFE, deren gemeinschaftliche Grenze sie ist, und die zusammen eine Figur ACFE sind, oder in ihnen selbst liegen. Sie sind aber auf derselben

Seite,

Seite, wenn sie beyde entweder in einer dieser Grenzlinien oder Figuren sind.

7. Satz.

Eine gerade Linie schneidet eine andere oder ihre Verlängerung, wenn ihre Endpuncte auf entgegengesetzten Seiten derselben sind. Sind sie aber auf derselben Seite, so begegnet sie ihr nicht.

Beweis. Es seyen C, E, (Fig. 24.) die Endpuncte der einen geraden Linie CE, auf beyden Seiten der andern AB. Man nehme in derselben (Post. 6.) A, D, ziehe (Post. 27.) CA, CD und EA, ED, so ist AD die gemeinschaftliche Grenze der beyden Dreyecke ACD, ADE, die zusammen die Figur ACDEA (Ansch. 6.) sind. Ist nun CE außer derselben, so schneidet die Verlängerung AD, die im Dreyeck ACE ist, die CE, in F, (Post. 38.) und (6. Satz). Wenn aber CE in gedachter Figur ist, so schneidet AD selbst, die CE (Ax. 5.).

Ferner seyen C, E, (Fig. 24.) die zwey Endpuncte der geraden Linie CE, auf derselben Seite der AB. Schnitten beyde einander in F, so wären, wenn man AC, AE, zieht, die Dreyecke ACF, AEF die beyden Theile des Dreyecks ACE (5. Satz), also CE auf entgegengesetzten Seiten der AB, gegen die Voraussetzung.

8. Satz.

Es ist nur ein Dreyeck möglich, das zwey gegebene Seiten, und einen gegebenen Winkel derselben enthält.

Beweis. Es seyen (Fig. 16.) AB, BC, ABC, die gegebenen Seiten und ihr Winkel, so sind die Endpuncte A, C, der dritten Seite BC, gegeben, die also nur eine ist (Ax. 10.). Also ist nur ein Dreyeck ABC möglich.

9. Satz.

Zwey Dreyecke sind übereinstimmend, wenn zwey Seiten und ihr Winkel in beyden übereinstimmen.

Beweis. Es seyen AB, BC, ABC, im Dreyeck ABC (Fig. 16.) mit DC, EF, DEF im Dreyeck DEF (Fig. 3.) übereinstimmend (Postulate 29. 30. 32.). Gesetzt, dieß Dreyeck wäre mit dem ABC nicht übereinstimmend, so ist es (Post. 32. 39.) ein anderes. Aber nach (8. Satz) ist nur ein Dreyeck DEF, das zwey gegebene Seiten DE, EF, und ihren gegebenen Winkel enthält, möglich, welches sich widerspricht.

Erklärung. Nebenwinkel BAC, CAD (Fig. 18.) sind, die einen gemeinschaftlichen Schenkel AC haben, und deren beyde andere Schenkel AB, AD, die entgegengesetzten Theile einer geraden Linie BAD sind.

10. Satz.

10. Satz.

Zwey gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel.

Beweis. Es seyen die Winkel BAC, (Fig. 18.), FEG, (Fig. 19.) gleich. Man setze AB und EF, AC und EG, AD und EH gleich, ziehe BC, CD und FG, GH, so sind die Dreyecke ABC, EFG (9. Satz), also auch die BCD, FGH, gleich, mithin auch die Seiten CD, GH, und die Winkel D, H, folglich die Dreyecke ACD, EGH; also auch die Nebenwinkel CAD, GEH.

Erklärung. Scheitelwinkel AEG, FEI (Fig. 21.) sind, deren Schenkel EA, EG, und EF, EI, die entgegengesetzten Theile zweyer einander schneidender Linien AEF, GEI sind.

11. Satz.

Scheitelwinkel sind gleich.

Beweis. Denn die Scheitelwinkel GEH, FEG haben den gemeinschaftlichen Nebenwin- FEG, und sind also (10. Satz) gleich.

12. Satz.

Es ist nur ein Dreyeck möglich, das eine gegebene Seite und die beyden an ihr liegenden gegebenen Winkel hat.

Beweis. Es seyen AB, A, B, (Fig. 24.) im Dreyeck ABC, gegeben. Wäre ein anderes Dreyeck ABD, dessen Spitze D in einer der Seiten BC, AC, hier BC ist, möglich, so ist

AG im Dreyeck ABC (5. Satz), also der Winkel BAG kleiner als der gegebene BAC. Wäre aber die Spitze E des andern Dreyecks in der verlängerten Seite BC, so ist AC im Dreyeck ABE, und der Winkel BAE größer als der gegebene Winkel BAC.

13. Satz.

Zwey Dreyecke sind übereinstimmend, wenn eine Seite und die anliegenden Winkel in beyden übereinstimmen.

Beweis. Es seyen AB, A, B, im Dreyeck ABC (Fig. 16.) mit DE, D, E, im Dreyeck DEF (Fig. 17.) übereinstimmend. Gesetzt, es wäre CF größer als BC, und EK der BC gleich, so ist EDK kleiner, aber nach (10. Satz) größer als A, welches sich widerspricht. Eben so folgt der Beweis, wenn BC größer als CF wäre.

14. Satz.

Wenn zwey Seiten eines Dreyecks gleich sind, so sind ihre Winkel mit der dritten gleich.

Beweis. Es seyen die Seiten AB, AC im Dreyeck ABC (Fig. 20.) gleich. Gesetzt, ABC wäre größer als ACB, so seyen ABF, ACB gleich, also BF im Dreyeck ABC, und das Dreyeck ABF ein Theil von ihm; aber, nach (13. Satz) sind beyde gleich. Eben so, wenn ACB größer als ABC wäre. Da also die Winkel ABC, AC gleich, so sind es auch

ACH,

ACH, ABG (10. Satz), und ECH, DBG, BCG, CBD (11. Satz).

15. Satz.

Wenn ein Dreyeck zwey gleiche Winkel hat, so sind ihre entgegengesetzten Seiten gleich.

Beweis. Es seyen die Winkel ABC, ACB, im Dreyeck ABC (Fig. 20.) gleich. Wäre AC, größer als AB, so seyen CF, AB, gleich, und BF gezogen, daß also das Dreyeck BCF ein Theil (5. Satz) vom Dreyeck ABC ist; aber nach (9. Satz) sind beyde gleich. Eben so, wenn AB größer als AC wäre.

Erklärung. Wenn zwey Seiten AB, AC, in einem Dreyeck ABC (Fig. 20.) gleich sind, so heißt es ein gleichschenklichtes Dreyeck.

16. Satz.

Es ist nur ein Dreyeck mit denselben Seiten, in derselben Ordnung, möglich, das eine gegebene derselben, enthält.

Beweis. Es seyen (Fig. 17.) ED, EF, DF, die Seiten des Dreyecks EDF, und ED die gegebene derselben. Wäre ein anderes Dreyeck möglich, so sey es EDG, dessen Spitze G außer jenem ist. Man ziehe FG, so sind im gleichschenklichten Dreyeck EFG, und DFG, die Winkel EFG, EGF und DFG, DGF (14. Satz) gleich; aber DG, EF theilen die Figur (5. Satz), mithin auch die Winkel DFG, EGF, also ist der Winkel DFG größer als

EFG oder EGF, mithin auch größer als DGF, gegen das vorige.

Ist ferner die Spitze H des andern Dreyecks DEH im Dreyeck DEF, so sind, wenn FH gezogen, und EF, EH in FI, HL verlängert wird, die Winkel DFH, DHF und IFH, LHF gleich. Aber die Verlängerung HL von EH ist außer den Dreyecken DEH, EHF (4. Satz), also im Dreyeck DHF, das mit vorigem als ein Theil, der zweyte Theil des Dreyecks EDF, ist, und theilt mithin den Winkel DHF, so wie DF den Winkel HFI (4. Satz) theilt; also ist der Winkel DHF größer als FHL oder IFH, folglich auch größer als DFH, gegen das vorige.

17. Satz.

Zwey Dreyecke sind übereinstimmend, wenn die Seiten in beyden übereinstimmen.

Beweis. Es seyen AB, DE, BC, EF und AC, DF in den beyden Dreyecken ABC, DEF (Fig. 16. und 19.) gleich. Gesetzt, es wäre das Dreyeck DEF, mit ABC, nicht übereinstimmend, so sey es (Post. 32. 39.) ein anderes DEG in derselben Ordnung; aber nach (16. Satz) sind EF, EG und DF, DG, mithin auch BC, EG und AC, DG, ungleich, welches sich widerspricht.

18. Satz.

Der äußere Winkel eines Dreyecks ist größer als jeder der beyden innern, deren keiner sein Nebenwinkel ist.

Beweis. Es sey CBD (Fig. 21.) der äußere Winkel des Dreyecks ABC. Man setze auf entgegengesetzten Seiten der BC die Winkel ACB, CBF und die Seiten CA, BF gleich, und ziehe CF. Wäre CBF wie CBG größer als CBD, so sind, wenn BG wie BF der AC gleich gesetzt, und CG, AG gezogen wird, die Dreyecke AGB, AGC (17. Satz) übereinstimmend; aber, B ist im Dreyeck ACG, folglich das Dreyeck ABG kleiner als AGC, gegen das vorige. Eben so, wenn CBG, ACB gleich wären.

Ferner ist also der äußere Winkel ABE, also auch der CBD (11. Satz), größer als BAC.

19. Satz.

Der größern Seite eines Dreyecks steht der größere Winkel entgegen.

Beweis. Es sey die Seite BC des Dreyecks ABC (Fig. 22.) größer als AC. Man setze CD, AC gleich, und ziehe AD, so sind die Winkel CAD, CDA (14. Satz) gleich; aber nach (18. Satz) ist CDA, also auch CAD, größer als ABC, und nach (5. Satz) ist CAD kleiner als BAC, also BAC größer als ABC.

20. Satz.

Dem größern Winkel eines Dreyecks steht die größere Seite entgegen.

Beweis. Denn wären die entgegengesetzten Seiten gleich, oder die dem größern Winkel entgegenstehende die kleinere, so wären auch die entgegengesetzten Winkel gleich, oder der der größern Seite entgegengesetzte der kleinere (14. und 19. Satz), gegen die Voraussetzung.

21. Satz.

Die Summme je zweyer Seiten eines Dreyecks ist größer als die dritte.

Beweis. Es sey (Fig. 22.) ABC das Dreyeck. Man verlängere die eine Seite BC in CE der CA gleich, und ziehe AE, so sind die Winkel CAE, CEA im Dreyeck ACE (14. Satz) gleich; aber im Dreyeck BAE ist (4. und 5. Satz) BAE größer als CAE, mithin auch größer als AEB; also ist nach (20. Satz) BE, das ist BC und AC, zusammen größer als AB.

22. Satz.

Es ist nur ein Dreyeck möglich, das eine gegebene Seite, einen gegebenen an ihr liegenden Winkel, und einen ihr entgegengesetzten enthält.

Beweis. Es seyen (Fig. 22.) AB, ABC und ACB die gegebene Seite, und die gegebenen Winkel. Wäre ein anderes Dreyeck ABD

ABD möglich, dessen Spitze D in BC ist, so ist (18. Satz) sein Winkel ADB größer als ACB. Ist aber die Spitze E eines andern Dreyecks ABE in der Verlängerung CE von BC, so ist der Winkel AEB kleiner als ACB; beydes gegen die Voraussetzung.

23. Satz.

Zwey Dreyecke sind übereinstimmend, wenn eine Seite, der anliegende und entgegengesetzte Winkel in beyden gleich sind.

Beweis. Es seyen AB, DE; ABC, DEF und ABC, DEF (Fig. 16. und 17.) gleich. Gesetzt, es wäre das Dreyeck DEF mit dem ABC nicht übereinstimmend, so ist es (Post. 32. 39.) ein anderes; aber nach (22. Satz) ist nur ein Dreyeck DEF möglich, das die gegebene Seite DE, und die gegebenen Winkel DEF, DFE enthält, welches sich widerspricht.

24. Satz.

Auf einer geraden Linie aus einem Puncte in ihr, ist eine gerade Linie als gemeinschaftlicher Schenkel gleicher Nebenwinkel möglich.

Beweis. Es sey AB die gerade Linie, und C ein Punct in ihr (Fig. 27.). Man setze CA, CB gleich, und nehme D außer AB (Post. 6.), ziehe AD, BD, und setze ferner BAE, ABD, und AE, BD, gleich. Ist der Winkel BAD größer als BAE, so schnei-

det

det (Postul. 38.) AE die BD in F. Ist BAD kleiner als BAE, so schneiden AD, BE einander in F. Sind BAD, BAE gleich, so sind D, E, F die Spitzen dieser Dreyecke, die nun eines sind. In jedem Falle ist CF auf AB in C der gemeinschaftliche Schenkel der gleichen Nebenwinkel ACF, BCF. Denn die Dreyecke ACF, BCF sind nach (14. und 17. Satz) gleich, also auch die Nebenwinkel ACF, BCF.

Erklärungen. Eine gerade Linie ist auf einer andern senkrecht, wenn sie der gemeinschaftliche Schenkel gleicher Nebenwinkel ist, und ein solcher Winkel heißt ein rechter.

Eine gerade Linie ist schief auf einer andern, wenn diese Nebenwinkel ungleich sind, und der eine Winkel, der kleiner als ein rechter ist, heißt spitz, der größere aber stumpf.

Ein Winkel, außer dem die Verlängerung eines seiner Schenkel liegt, heißt ein hohler Winkel, ein solcher aber, in dem diese Verlängerung ist, ein erhabener Winkel.

25. Satz.

Auf einer geraden Linie oder ihrer Verlängerung ist aus einem Puncte außer ihr, eine senkrechte Linie möglich.

Beweis. Es sey (Fig. 24.) AB die gerade Linie, C ein Punct außer ihr. Man nehme in AB die Puncte A, D, ziehe AC, DC; ferner

ferner setze man die Winkel DAE, CAD und AE, AC auf beyden Seiten der AB, gleich, und ziehe BE, DE, so schneidet CE die AB in F (7. Satz). Nun mag D im Dreyeck ACE außer ihm seyn, so sind (9. Satz) DC, DE, und ADC, ADE, mithin auch (10. Satz) BDC, BDE, also auch (9. Satz) AFC, AFE und (11. Satz) AFC, BFC gleich.

26. Satz.

Rechte Winkel sind gleich.

Beweis. Es seyen ACF, AFC (Fig. 23. und 24.) rechte Winkel. Wäre AFC größer als ACF, so wäre es auch BCF, gegen (10. Satz).

Erklärung. Ein Dreyeck AFC (Fig. 24.), das einen rechten Winkel F hat, heißt rechtwinkelicht, die den rechten Winkel einschließende Seiten FA, FC heißen seine Catheten, und die ihm entgegenstehende Seite AC seine Hypothenuse.

27. Satz.

Im rechtwinklichten Dreyeck ist jeder der beyden andern Winkel außer dem rechten spitz, und die Hypothenuse größer als jede Cathete.

Beweis. Es sey AFC das bey F rechtwinklichte Dreyeck (Fig. 24.), so ist der Winkel FAC (18. Satz) kleiner als BFC oder AFC. Ferner ist also (20. Satz) AC größer als FC.

28. Satz.

28. Satz.

Es sind nur zwey Dreyecke möglich, die zwey gegebene Seiten, und einen der einen entgegengesetzten Winkel enthalten, wenn er spitz ist, und der der andern Seite entgegengesetzte Winkel im einen spitz, im andern stumpf ist; aber nur eines, wenn der gegebene Winkel ein rechter oder stumpfer ist.

Beweis. Es sey (Fig. 25.) BAD der spitze Winkel, AB, BC oder BD die Seiten. Aus B sey BE auf AE (26. Satz) senkrecht. Ist BC im rechtwinklichten Dreyeck AEB, so seyen EC, ED in AE, und ihrer Verlängerung, gleich; und wenn BD gezogen wird, so sind BC, BD in den rechtwinklichten Dreyecken BEC, BED (9. Satz) gleich. Ist BC wie BD außer dem rechtwinklichten Dreyeck AEB, so folgt dasselbe. Wäre aber noch ein drittes Dreyeck ABF möglich, dessen Spitze in AE ist, so sind (18. und 19. Satz) die Winkel ACB, AFB ungleich, und eben so, wenn F in der Verlängerung von AE ist.

Ferner sey BAG ein rechtwinklichtes Dreyeck, so ist kein anderes ABH, dessen Spitze H in AG oder ihrer Verlängerung ist (18. und 20. Satz), möglich.

Endlich sey BAI der stumpfe Winkel im Dreyeck ABI, so ist kein anderes ABK, dessen Spitze K in AI oder ihrer Verlängerung ist, nach (18. und 20. Satz) möglich.

29. Satz.

29. Satz.

Zwey Dreyecke sind übereinstimmend, wenn zwey Seiten und der der einen entgegenstehende Winkel in beyden ein rechter oder stumpfer ist, und wenn er spitz ist, der der andern Seite entgegenstehende Winkel in beyden spitz oder stumpf ist.

Beweis. Es seyen BAG, EDF (Fig. 17. 25.) die bey A, D, rechtwinklichten Dreyecke, und die Seiten AB, DE, und BG, EF in beyden gleich, so ist (28. Satz) nur ein Dreyeck BAG möglich, welches also (Post. 39.) mit dem Dreyeck EDF übereinstimmt.

Eben so, wenn AB, DE; BC, EF; und die spitzen Winkel BAI, EDF in den Dreyecken ABI, EDF (Fig. 19. 27.) gleich sind.

Sind ferner AB, DE; BC, EF; und die spitzen Winkel BAC, EDG in den Dreyecken ABC, DEF (Fig. 19. 27.) gleich, und überdem beyde Winkel ACB, DFE, stumpf, so ist nur ein Dreyeck ABC (28. Satz) möglich. Eben so wenn AB, DE; BD, EF; BAC, EDG gleich, und die Winkel ADB, DGE spitz sind. In beyden Fällen also sind die Dreyecke übereinstimmend.

Erklärungen. Parallellinien AB, CD (Fig. 28.) oder gleichlaufende, sind zwey gerade

Linien in einer Ebene, die weder selbst noch in ihrer Verlängerung einander begegnen können.

Innere Winkel an einer Linie AC sind zwey Winkel BAC, DCA (Fig. 28.), deren einer gemeinschaftlicher Schenkel sie ist, und deren andre Schenkel AB, CD auf einerley Seite derselben sind.

Innere und äußere Winkel an einer Linie ACF (Fig. 28.) sind zwey Winkel BAC, DCF, davon der eine Schenkel AC des einen die Linie selbst, der des andern CF ihre Verlängerung ist, und die andern beyden Schenkel AB, CD der Winkel, auf derselben Seite der Linie sind.

Wechselwinkel an einer Linie AC sind zwey Winkel BAC, HCA (Fig. 28.), deren einer gemeinschaftlicher Schenkel sie ist, und deren andre Schenkel AB, CH auf entgegengesetzten Seiten derselben sind.

30. Satz.

Zwey gerade Linien, die eine dritte so schneidet, daß der innere und äußere Winkel, oder die Wechselwinkel, gleich, oder die beyden innern zusammen Nebenwinkeln gleich sind, sind gleichlaufend.

Beweis. Es seyen (Fig. 26.) AB, CD zwey gerade Linien, die eine dritte FG, in

A, C,

A', C, so schneidet, daß der innere Winkel BAF dem äußern DCF gleich ist. Wären AB, CD nicht gleichlaufend oder Seiten im Dreyeck ABCEDA, so ist (18. Satz) der innere Winkel BAF kleiner als der äußere DCF, welches sich widerspricht.

Ferner ist, wenn die Wechselwinkel BAC, ACH gleich sind (11. Satz), der innere Winkel BAF dem äußern DCF gleich, welches also der vorige Fall ist.

Endlich, wenn die innern Winkel BAC, ACD zusammen Nebenwinkeln, wie ACD, DCF gleich sind, so ist der innere Winkel BAF dem äußern DCF gleich, also folgt der Beweis wie im ersten Fall.

31. Satz.

Zwey gerade Linien, die auf beyden Seiten mit einer dritten mit ihr gleichlaufend sind, sind selbst gleichlaufend.

Beweis. Es seyen AB, EF (Fig. 27.) auf entgegengesetzten Seiten der CD mit ihr gleichlaufend; begegneten sie einander in K, so nehme man G, I in AB, CD, und ziehe GI, die (7. Satz) CD in H und nach (Post. 39.) im Dreyeck GKI entweder AB oder EF oder beyden begegnet, gegen die Voraussetzung.

32. Satz.

Zwey gerade Linien, die eine dritte so schneidet, daß ein innerer Winkel kleiner als sein äußerer, oder kleiner als sein Wechselwinkel, oder mit seinem innern kleiner als die Summe von Nebenwinkeln ist, begrenzen mit ihr ein Dreyeck, das diese beyden innern Winkel hat.

Beweis. Es seyen AB, CD, die geraden Linien (Fig. 28.), die eine dritte BC in B, C, so schneidet, daß die innern Winkel ABC, BCD zusammen kleiner als die Summe von Nebenwinkeln sind. Man setze DCF, CF, CFG, GFI, FI, FIK, u. s. w. gleich. Ferner seyen GFH, KIM, u. s. w. das Zweyfache, Dreyfache u. s. w. von DCE, so ist (Post. 47.) ein vielfacher Winkel KIM von DCE möglich, der entweder zunächst größer ist als der Winkel ABC, oder der gleiche KIN, oder ihm gleich. Ist das erste, so ist LIM (30. Satz) mit FH, diese mit CE, diese mit AB, und also LIM mit AB gleichlaufend. Man setze ferner PNI, MIN gleich, und NQS, QTW u. s. w. diesen Winkeln um ein einfaches, zweyfaches u. s. w. von DCE, größer, so giebt es einen vielfachen Winkel QTW, der zunächst größer ist, als der Winkel BCD, oder ihm gleich (Post. 47.), und NP, QS, TW sind (30. 31. Satz) der LM gleichlaufend. Sind nun

T, I

T, I auf entgegengesetzten Seiten der AB, wird also BT gezogen, so theilt BA in X den Umfang der Figur BCFINQT (Erklärung), und der eine Theil BCFINQX enthält die geraden Linien AB, CD, FG, IK, NO, QR, die ihre Winkel, den einen QTB vielleicht ausgenommen, theilen. Zieht man also aus B, die geraden Linien BF, BI, BN, BQ nach den Scheiteln der Winkel in obiger Figur BCFINQX, so sind zwey Dreyecke wie BCF, BFI, BIN, BNQ, BQX weniger als Winkel, indem zu jedem, B, C, ausgenommen, ein Dreyeck gehört; und alle zusammen sind, da keines mit dem andern einen gemeinschaftlichen Theil hat, der Figur BCF INQX gleich. Denn, je zwey Dreyecke wie BCF, BFI, deren jedes eine der Parallelen CE, FH enthält, haben an der Seite BF einen gemeinschaftlichen Theil, in dem sich die Parallelen schneiden würden. Ferner, haben Dreyecke wie BFI, BIN, deren gemeinschaftliche Spitze I in LM ist, keinen gemeinschaftlichen Theil an BI, da GFH wenigstens ein einfaches DCE ist, und MIN nur ein Theil desselben. Endlich, haben Dreyecke wie BNQ, BQT, davon das letzte keine der Parallelen QS, TW enthält, an BQ keinen gemeinschaftlichen Theil, da QS das erste theilt, und der eine Theil durch die Seite BQ,

 von

von BQT abgesondert wird. Also enthält wenigstens eines dieser Dreyecke zwey von den geraden Linien AB, CD, FF, IK, NV, QR, die in ihm nach (5. Satz) einander schneiden. Ist aber T, wie X in BA, so folgt dasselbe. Wenn aber T wie Q mit L auf derselben Seite von AB ist, so daß QR wie QY entweder in QS, oder im Winkel NQS ist, so nehme man X in BA, und ziehe QX und BQ. Setzte man, QS begegnete der AB, so folgte wie vorhin, daß zwey von den geraden Linien, wie AB, CD u. s. w. einander begegnen. Wird aber QS mit AB gleichlaufend gesetzt, so theilt QS also QY den Winkel BQN der Figur BCF INQ, die ein Theil von BCFINQX ist, also AB nicht enthält, und es folgt wie vorhin, daß zwey der geraden Linien CD, FG u. s. w. einander begegnen.

Ist aber der andere Fall, daß KIN, KIM gleich sind, oder IN in IM ist, so bleibt alles wie im ersten Fall, nur sind NQS, QSW u. s. w. das einfache, zweyfache u. s. w. von DCE, da sie vorher die Summen von diesen vielfachen, und der Winkel MIN oder INP waren.

Gesetzt, es wären nun AB, CD gleichlaufend, so wären (31. Satz) jede zwey der

geraden

geraden Linien AB, CD, FG, IK u. s. w. gleichlaufend, welches dem Erwiesenen widerspricht.

Anmerkung.

Das wäre also der echte Beweis eines Satzes, auf dem fast die ganze Geometrie beruht, und den zu führen man seit 2000 Jahren vergebens versucht hat. Der menschliche Verstand hat in dieser Verlegenheit von allen Arten falscher Beweise Beyspiele geliefert. Diese nämlich sind in Absicht ihres Inhalts entweder metaphysisch oder empirisch. Das erste, wenn entweder ein Begriff auf eine Anschauung bezogen wird, dem keine entsprechen kann; oder wenn aus bloßen Begriffen, ihnen mag eine Anschauung können gegeben werden oder nicht, geschlossen wird. Empirisch aber sind die Beweise, deren Elemente empirische Vorstellungen enthalten. Bey der ersten Art metaphysischer Beweise ist es die Idee des Unendlichen, der zum Schein eine Anschauung untergelegt wird, bloß aus dem Grunde, weil es möglich ist, eine Anschauung über jede gegebene Grenze zu erweitern; aber diese Möglichkeit selbst giebt keine Anschauung, die unendlich wäre. Bey der zweyten Art metaphysischer Beweise wird entweder nach mathematischen Principien der Größen überhaupt geschlossen, oder nur nach

metaphysischen. Beydes ist falsch; denn im ersten Fall ist zwar der Begriff der Größe in jeder Anschauung enthalten, aber diese enthält außer ihm noch mehr, die Begrenzung einer Anschauung durch eine andere, oder die Gestalt, welches durch bloße Größenbegriffe unbestimmbar ist. Im andern Fall kann kein Princip der Metaphysik, da es bloß das Verhältniß der Anschauungen (reiner und empirischer), zu den Begriffen enthält, und nicht die Bestimmung der erstern durch sie, als Element eines Beweises der Geometrie gebraucht werden. Was die empirischen Beweise betrifft, so enthalten sie insgesammt den Begriff der Bewegung, der schon wegen seines Ursprungs nicht in die Geometrie gehört, und außerdem auch keine Anschauung bestimmt, weil er bloß ihre Veränderungen enthält, die selbst in jener erst müssen bestimmt werden. Die Bewegung, die in den Postulaten zur Erzeugung der Anschauungen vorausgesetzt wird, gehört in so fern zur Geometrie, sie bestimmt aber nichts als die bloße Möglichkeit derselben. In der Folge ist es aber nur um Bestimmung der Anschauungen selbst zu thun. Außerdem ist diese Bewegung nicht die oben gemeynte, einer Anschauung in einer andern, die jene also voraussetzt, und zur reinen Bewegungslehre gehört. Die empirischen Beweise

aber,

aber, welche wohl gar durch ein Experiment geführt werden, sind viel zu tief unter der Würde der Geometrie, als daß selbst der gemeinste Verstand sie billigen könnte. Zur Erläuterung eines geometrischen Satzes, auch etwa zur Entdeckung, wenn die Einsicht nicht hinreicht, können solche Experimente angewandt werden, indem es der Wissenschaft gleichgültig seyn kann, wie die empirische Anschauung eines Satzes, der sonst durch einen echten Beweis feststeht, durch Siune empfunden wird. Ueberdem kann auch die Anschauung eines geometrischen Satzes weder in der Erfahrung ohne Fehler dargestellt, noch durch sie bestimmt werden, wenn nicht, wie beym Menschen der Fall ist, vorauszusetzen ist, daß die Sinne empirische Anschauungen von jeder intensiven und extensiven Größe empfinden können.

Sonst ist im Beweise des obigen Satzes das Eigenthümliche in Ansehung der übrigen Versuche, daß, den Satz allgemein genommen, die Anschauung desselben mehrmal wiederholt mit andern, zu einer verbunden wird, um aus den Folgen dieser Verbindung in der letztern, auf die Bestimmung der erstern zu schließen, da in den vorhandenen Versuchen seine Anschauung allein mit andern gegebenen verbunden wird. Die erste Methode reicht in den

Beweisen überhaupt weiter als die letzte, da sie mehr Bestimmungen in der enstehenden Anschauung giebt, ohne neue unbekannte in sie zu bringen; und also um so bestimmter auf die Anschauung des Satzes schließen läßt. Außerdem ist in diesem Beweise merkwürdig, daß er, genau genommen, alle Principien, die auf gerade Linien in Ebenen sich beziehen, voraussetzt, welches in keinem der Beweise der vorhergehenden Sätze der Fall ist, und daß er also zu einem Satze gehört, der unter diesen am weitesten von den Axiomen entfernt ist, zu welchen Euklides ihn gesellet hatte.

Es giebt noch einen Satz der gemeinen Geometrie, den nämlich: daß dreyseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe gleichen Inhalt haben, von dem ein anderer echter Beweis, als den Euklides gegeben, zu wünschen wäre. Denn es scheint, die Anwendung der Exhaustionsmethode, nach der Euklides den Beweis führt, gehöre nur für krumme Linien, Flächen, und die dadurch begrenzte Figuren und Körper.

33. Satz.

Eine dritte gerade Linie schneidet zwey gleichlaufende Linien so, daß die innern und äußern Winkel, oder die Wechselwinkel gleich,

oder

oder die beyden innern zusammen, Nebenwinkeln gleich sind.

Beweis. Es seyen AB, CD, (Fig. 26.) gleichlaufende Linien, die FG in A, C schneidet. Wäre der innere Winkel BAC kleiner als der äußere DCF, so begegneten AB, CD einander (32. Satz), gegen die Voraussetzung. Eben so, wenn der Winkel BAC kleiner als sein Wechselwinkel HCA, oder die innern Winkel BAC, DCA zusammen kleiner als Nebenwinkel wären.

34. Satz.

Die Winkel eines Dreyecks sind zusammen zwey Nebenwinkeln gleich.

Beweis. Es sey ABC (Fig. 29.) das Dreyeck. Man verlängere AB in BD, und setze DBE, BAC gleich, so theilt (18. Satz) BE den äußern Winkel CBD in die beyden Winkel DBE, CBE, und CBE, ACB sind (33. Satz) gleich. Also ist der äußere Winkel CBD den beyden Winkeln des Dreyecks BAC, und ACB zusammengenommen, gleich; folglich, wenn ABC hinzukömmt, die Summe der drey Winkel BAC, ACB, ABC der Summe der Nebenwinkel ABC, CBD gleich.

Anmer-

Anmerkung.

In diesen Sätzen ist die Grundlegung der gemeinen Geometrie enthalten, da der erste Theil derselben, die ebene Geometrie, nur gerade Linien in einer Ebene, und deren Bestimmung durch Dreyecke, enthält, als der Figur, in die jede geradelinigte kann zerlegt, und aus der jede aus der Zusammensetzung kann gegeben werden, so daß die Elemente der Sätze und ihrer Beweise, Bestimmungen der Dreyecke, die aber alle gegeben sind, enthalten. Diese Bestimmungen sind nämlich, entweder Eigenschaften gegebener Dreyecke, oder Bedingungen ihrer Möglichkeit, und betreffen im ersten Fall, entweder das Verhältniß der Seiten und Winkel in einem Dreyeck, oder ihre Vergleichung in Dreyecken in verschiedenen Räumen; im andern Fall aber sind es Bedingungen, unter denen das Dreyeck entweder möglich ist, oder nicht.

Verbesserungen.

S. 4. Z. 17. statt verbindet, oder gar verdrängt kömmt verbinden, oder sie gar verdrängen.

— 6. Z. 17. statt Ausführung kömmt Auflösungen.

— 13. Z. 1. v. u. statt Linie kömmt Fläche.

— 17. Z. 11. statt Grundfläche kömmt Grenzfläche.

— 20. Z. 1. v. u. ist in überflüssig.

— 22. Z. 2. v. u. statt auch kömmt und.

— 29. Z. 19. 20. 21. fällt von die größer an, alles weg, und statt dessen kömmt: und die mit einer gegebenen Linie übereinstimmt, ist möglich.

— 37. Z. 13. statt das kömmt durch das.

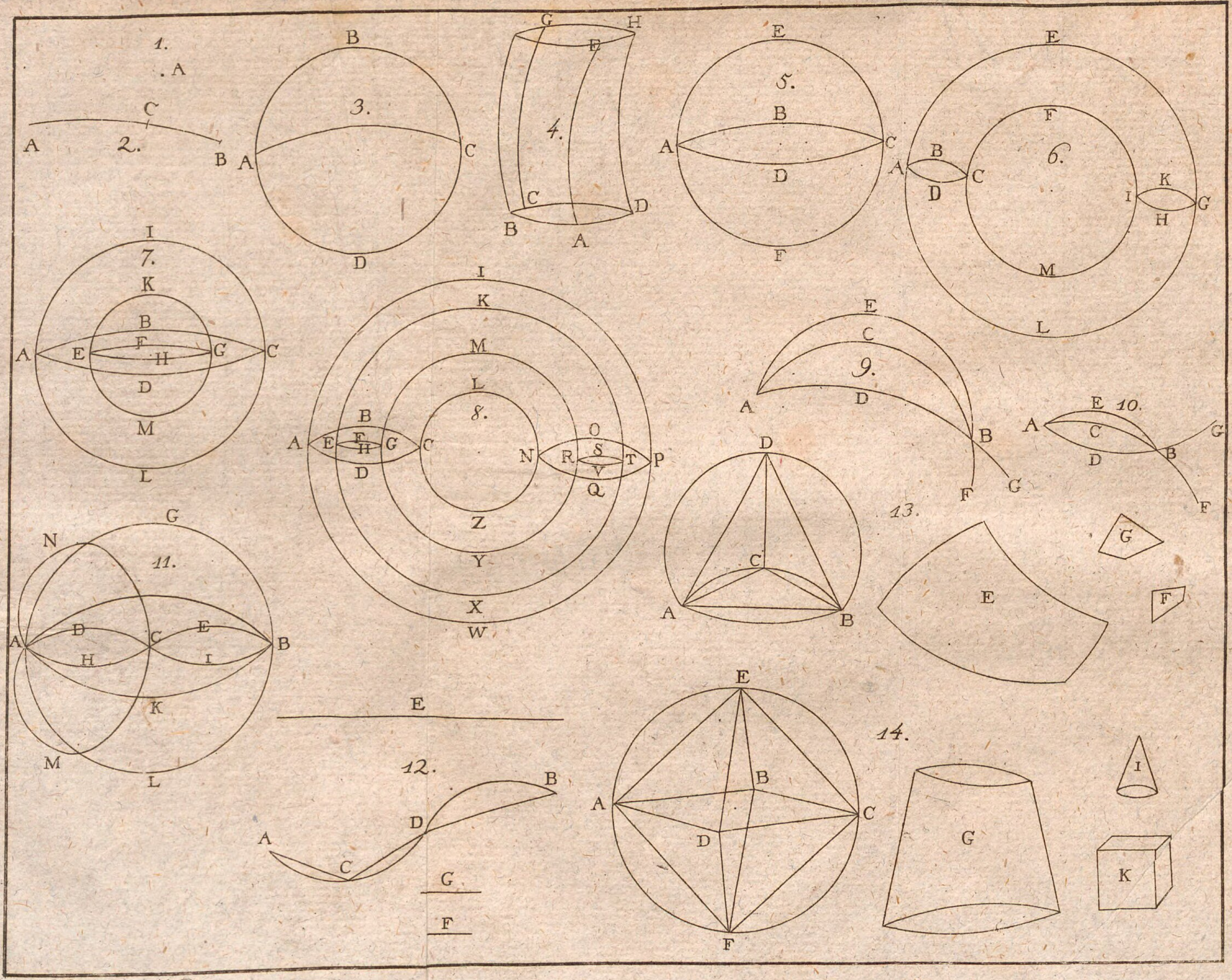
— 37. Z. 15. statt selbst aufgenommen sind kömmt allererst gegeben wird.

— 38. Z. 19. statt die kömmt Theile der.

— 38. Z. 21. statt ist kömmt sind.

— 47. Z. 3. v. u. statt Verknüpfung und Vergleichung kömmt Zusammensetzung und Theilung.

— 69. Z. 1. u. 2. statt wird also kömmt und wird.



Rehbein Versuch.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rehbein, Johann Heinrich Ernst

Versuch einer neuen Grundlegung der Geometrie

Göttingen 1795

Math.p. 464
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082661-6
VD18 10608982